Телесные углы и вычисление радиометрических интегралов

Материалы к лекциям по курсу "Основы синтеза фотореалистичных изображений"

Алексей Игнатенко

22 марта 2011 г.

Для вычисления различных интегралов компьютерной графики необходимо понятие телесного угла. В этой статье кратко дается определение этого понятия и способы вычисление основных типов интегралов по телесному углу

Определение телесного угла

Для облегчения понимания понятия телесного угла, рассмотрим определение плоского угла. Плоский угол — это геометрическая фигура, образованная двумя лучами (сторонами угла), выходящими из одной точки P (вершины угла). Меру плоского угла можно определить как длину сегмента окружности единичного радиуса с центром в точке P, заключенного между данными двумя лучами. Т.е. угол может меняться в пределах от 0 до 2π радиан ($2\pi r$ — длина окружности радиуса r).

В более общем случае, имея заданную точку P и некоторую кривую C, мы можем определить соответствующий этой кривой плоский угол θ как плоский угол, образованный радиальной проекцией кривой C на единичную окружность с центром в точке P (см. рис. 1). Также, зная длину дуги s проекции кривой на окружность радиуса r с центром в точке P, угол θ можно получить как отношение длины дуги к длине окружности $2\pi r$ и умноженный на длину единичной окружности 2π: $\theta = \frac{s}{2\pi r} \cdot 2\pi = \frac{s}{r}$.

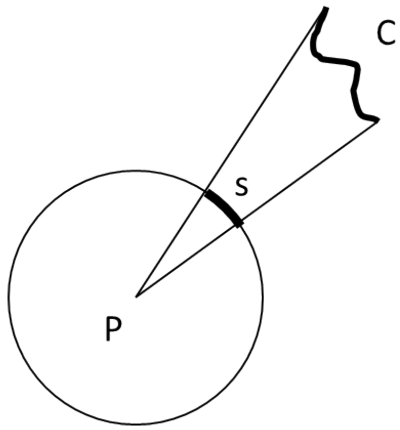

Рисунок 1: К определению плоского угла

Телесный угол можно определить подобным образом для замкнутой кривой C в пространстве (а не на плоскости) и заданной точки P. Он равен площади сегмента сферы единичного радиуса, соответствующему проекции кривой C на эту сферу (см. рис. 2). Телесный угол измеряется в стерадианах и может принимать значения от 0 до 4π ($4\pi r^2$ - площадь сферы радиуса r). Аналогично плоскому углу, зная площадь проекции на сферу радиуса r, телесный угол можно задать как отношение этой площади к площади всей сферы, умноженный на 4π для нормирования на площадь единичной сферы:

$$\omega = \frac{S}{4\pi r^2} \cdot 4\pi = \frac{S}{r^2}$$

Расчет телесного угла ω для площадки dA на расстоянии r под углом θ.

Пусть дана некоторая точка P и дифференциальная площадка $\mathrm{d}A$ на расстоянии r, находящая под углом θ к направлению на точку P (т.е. угол между нормалью к площадке и направлению на P равен θ). Необходимо найти телесный угол ω_A, который образует площадка для наблюдателя в точке P. Этот угол равен $^{A}/_{r^2}$(см. предыдущий пункт), где A — площадь проекции, которая равна $\mathrm{d}A\cos\theta$ (см. рисунок), следовательно:

$$\omega_A = \frac{\mathrm{d}A\,\cos\theta}{r^2} \tag{1}$$

Это верно для малых площадок и больших расстояний r.

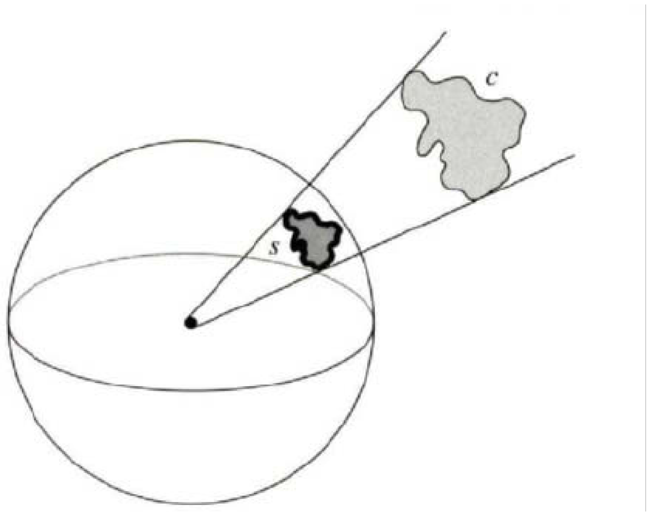

Рисунок 2: К определению телесного угла. Адаптировано из [Pharr2004]

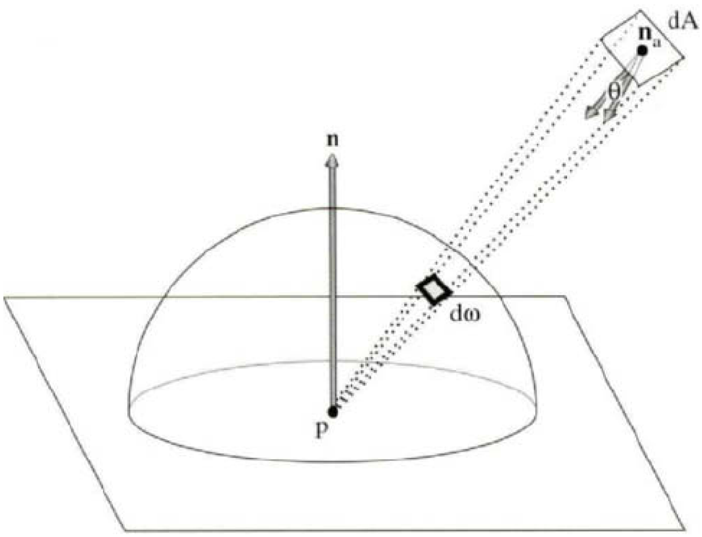

Рисунок 3: Телесный угол ω для дифференциальной площадки dA. Адаптировано из [Pharr2004]

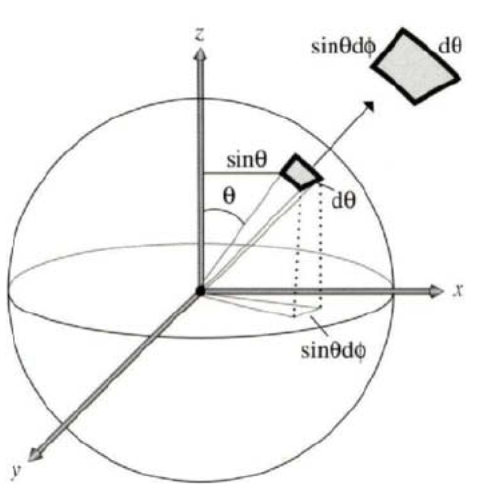

Рисунок 4: Дифференциальная площадь $\mathrm{d}A$, вырезаемая дифференциальным телесным углом $\mathrm{d}\omega$. Адаптировано из [Pharr2004]

1 Вычисление интегралов по телесным углам

Для различных радиометрических задач часто возникает необходимость расчета интегралов по телесным углам: $\int_\Omega F(\omega)\,\mathrm{d}\omega$.

Например, чтобы посчитать освещенность некоторой точки поверхности необходимо вычислить следующий интеграл:

$$E(p, n) = \int_\Omega L_i(p, \omega)\, cos\theta\, \mathrm{d}\omega \tag{2}$$

, где $L_i(p, \omega)$ — яркость источника по направлению ω, аθ — угол между нормалью n и направлением ω.

2 Переход к сферическим координатам

Для того, чтобы преобразовать интеграл по телесному к повторному интегралу, надо выразить телесный угол через координаты в декартовой или сферической системе координат. Рассмотрим переход от телесного угла $\mathrm{d}\omega$ к сферическим координатам $(\mathrm{d}\phi, \mathrm{d}\theta)$.

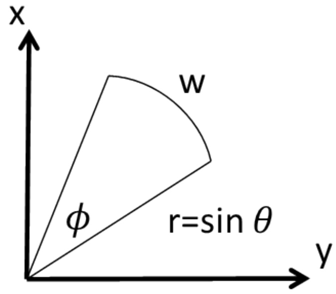

Рисунок 5: Вычисление длины стороны w

Дифференциальный угол $\mathrm{d}\omega$ по определению равен площади сегмента единичной сферы. Если построить этот сегмент как показано на рис. (4), то его площадь $\mathrm{d}A$ будет равна wh. Длина стороны h равна углу $\mathrm{d}\theta$ (по определению плоского угла), а длина стороны w непостоянна (см. рис. 5) и зависит от угла θ. Ее можно выразить через радиус и соответствующий угол $\mathrm{d}\phi$. Для плоского угла $\mathrm{d}\phi = w/r$, где $r = \sin\theta$. Т.е. $w = \sin\theta\,\mathrm{d}\phi$ и $\mathrm{d}\omega = \sin\theta\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$. Следовательно,

$$\int_\Omega F(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} F(\phi,\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

Интеграл для освещенности 2 будет выражаться в сферических координатах следующим образом:

$$E(p,n) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} L(p,\phi,\theta)\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

Обратите внимание, что для равномерно освещенной поверхности ($L_\omega = L_0, \forall\omega \in \Omega$),

$$E(p,n) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} L_0\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = L\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \pi L_0$$

3 Переход к интегралу по площади

Часто вычисление интегралов по углу затруднено. Для примера можно представить себе сцену с прямоугольным источником света и некоторой точкой, освещенность которой необходимо вычислить. В этом случае для каждого направления (ϕ,θ) необходимо вычислить, попадает ли оно на заданный источник света. В этом случае проще рассчитать интеграл по площади источника. Воспользуемся формулой (1) и получим следующую форму интеграла:

$$\int_{\Omega} F(\omega)\,\mathrm{d}\omega = \int_{S} \frac{F(A)\,\cos\theta_o}{R^2}\,\mathrm{d}A$$

Для нашего примера(2) освещенность будет вычисляться следующим образом:

$$E(p,n) = \int_{\Omega} L_i(p,\omega)\,cos\theta\,\mathrm{d}\omega = \int_{S} L_i(p,A)\frac{\cos\theta_i\,\cos\theta_o}{R^2}\,\mathrm{d}A$$

Список литературы

[Pharr2004] Pharr, Matt, and Greg Humpreys. Physically Based Rendering: From Theory to Implementation, 2004.